

План

- Загальне визначення гри.
- Раціональність. Чи раціональні люди?
- Спільне знання. Головоломки.
- Ідея рівноваги. Мінімакс, рівновага Неша, Штакельберга, корельована. Ігри на пошук рівноваги.
- Зворотна індукція. Ігри у розширеній формі.
- Байесовські ігри; Сигнали і скрінінги.
- Ультиматуми. Кооперативні ігри, розподіл прибутків, блеф.
- Аукціони і механізм дизайн.



Теорія ігор

Теорія ігор досліджує
стратегічну взаємодію
раціональних агентів

Найпростіший приклад гри: шахи

двоє гравців

ходять по черзі

результат: три
варіанти закінчення
гри

дії - ходи

повна інформація



Основні поняття теорії ігор

- Раціональність
- Стратегічна взаємодія,
інтелектуальність,
інформованість
- Виграш (функція корисності)



Гра як математичний об'єкт

- Множина гравців
- Можливі стратегії
- Функції виграшу

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1n^2 + 1 + n}{\sqrt[3]{3n^2 + 2n - 1}}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$y = \sqrt[3]{x+1}, \quad x = \lg t$$

$$C = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

$$f(x) = 2^{-x} + 1, \quad \varepsilon = 0.005$$

$$\lambda_2 = i\sqrt{14}$$

Напрямки теорії ігор

Економіка

Соціальні науки

Біологія

Комп'ютерні науки



Премії шведського банку (Нобелівські премії з економіки)

1972: Кеннет Арроу (за економіку)

1994: Джон Неш, Джон Харсаньї,
Рейнхард Зелтен;

1996: Вільям Вікрі;

2005: Роберт Ауман, Томас Шелінг;

2007: Леонід Гурвіц, Ерік Маскін,
Роджер Майерсон;

2012: Ллойд Шеплі, Алвін Рот.



Раціональність

Під раціональністю в теорії ігор розуміються (часто) дві речі:

- Задане відношення \geq на множині можливих результатів (декартовому добутку стратегій). Можливо за допомогою скалярної функції корисності. Гравці намагаються її максимізувати.
- Гравці здатні обчислити свою найкращу стратегію.

Ден Аріелі

OPINION	Welcome to The Economist Subscription Centre Pick the type of subscription you want to buy or renew. <input type="checkbox"/> Economist.com subscription - US \$59.00 One-year subscription to E Includes online access to e <i>The Economist</i> since 1997. 16% <input type="checkbox"/> Print subscription - US \$125.00 One-year subscription to ti of <i>The Economist</i> . 0% <input type="checkbox"/> Print & web subscription - US \$125.00 One-year subscription to ti of <i>The Economist</i> and onlin articles from <i>The Economis</i> 84%
WORLD	
BUSINESS	
FINANCE & ECONOMICS	
SCIENCE & TECHNOLOGY	
PEOPLE	
BOOKS & ARTS	
MARKETS & DATA	
DIVERSIONS	



SUBSCRIPTIONS

OPINION

WORLD

BUSINESS

FINANCE & ECONOMICS

SCIENCE & TECHNOLOGY

PEOPLE

BOOKS & ARTS

MARKETS & DATA

DIVERSIONS

Welcome to

The Economist Subscription Centre

Pick the type of subscription you want to buy or renew.

☐ **Economist.com subscription** - US \$59.00One-year subscription to *Economist.com*
Includes online access to all content
of *The Economist* since 1997.

16%



68%

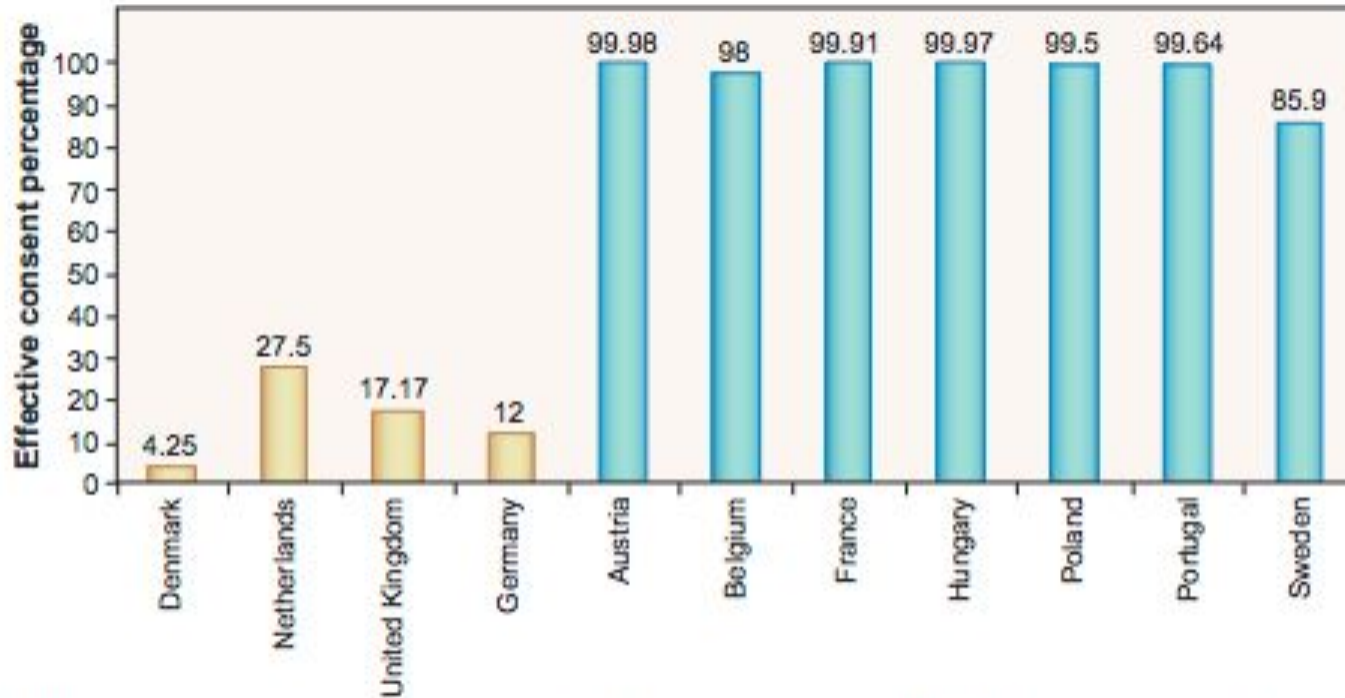
☐ **Print & web subscription** - US \$125.00One-year subscription to the
print edition of *The Economist* and online
access to all content of *The Economist*

84%



32%

Чи раціональні люди? Згода на донорство органів



Effective consent rates, by country. Explicit consent (opt-in, gold) and presumed consent (opt-out, blue).

Спільне знання

Якщо А і Б знають про Z, то у них є взаємне знання.

Спільне знання досягається як границя:

А знає про Z,

Б знає про Z

А знає, що Б знає про Z

Б знає, що А знає про Z...

....

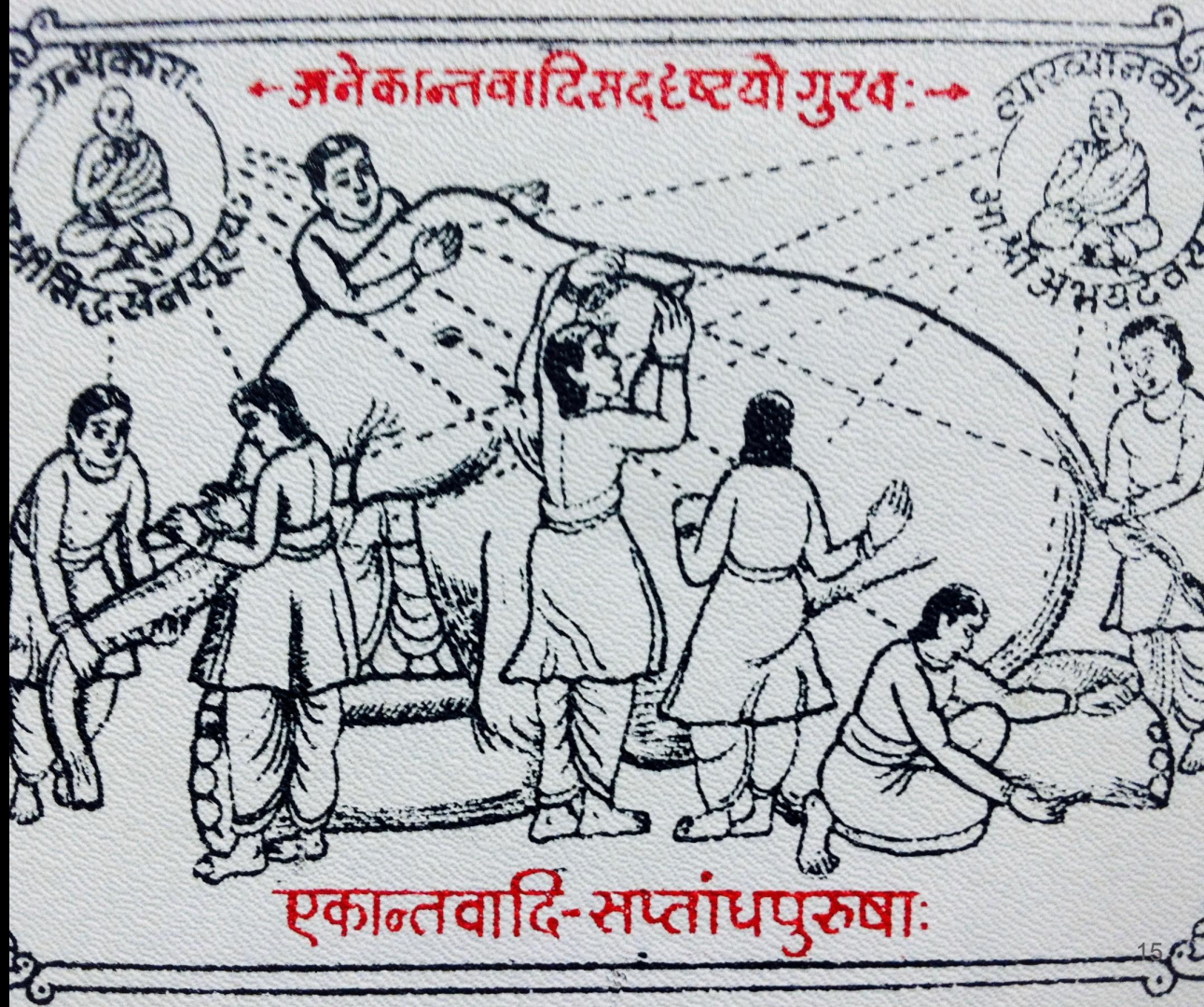
Р. Ауман. Згода про незгоду.

Двоє гравців, які мають певні апріорні знання і спільне знання не можуть мати різних апостеріорних знань.

Приклад: монетка.

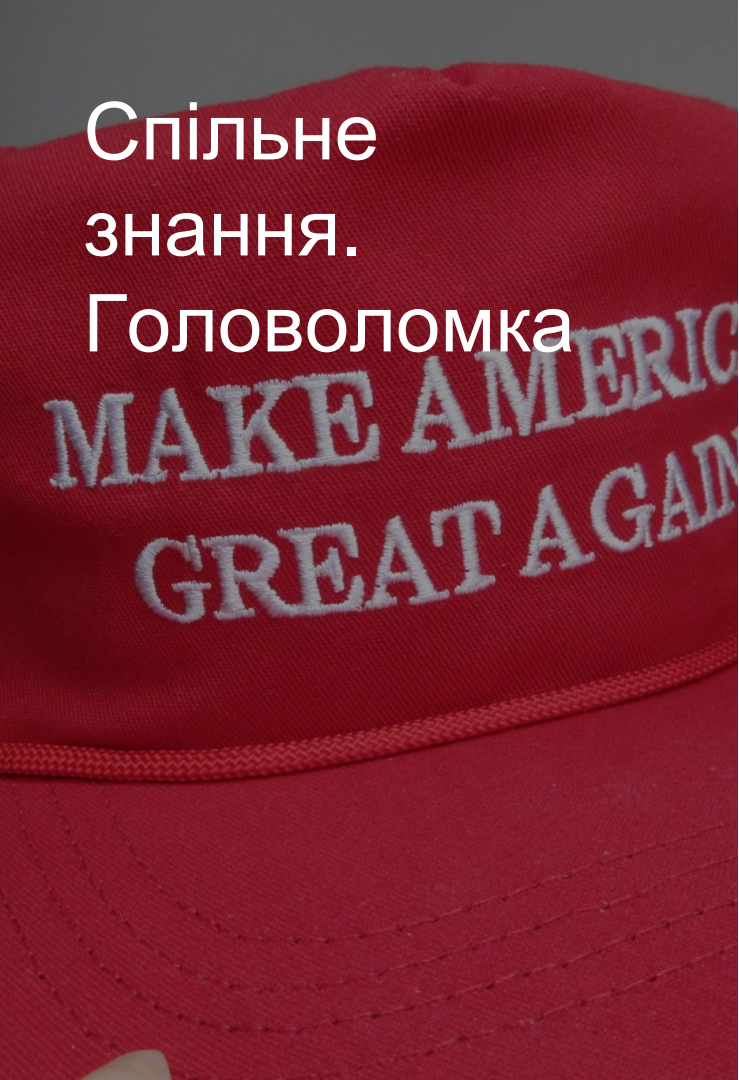
Спільне знання і логічні ГОЛОВОЛОМКИ

- ідея спільного знання досить складна
- якщо двоє знають щось, то це взаємне знання
- перехід до нескінченності дає спільне знання



Спільне знання. Головоломка

- Троє учасників сидять навпроти один одного. Кожен бачить двох інших. На голові капелюхи: червоний або білий - це спільне знання.
- Кожен має відповісти на питання - який капелюх на ньому. Це відбувається по черзі, і всі мовчать.
- Всі капелюхи червоні, тобто кожен баче два червоних капелюхи, але не знає який на ньому.



Спільне
знання.

Головоломка

- Зовнішній спостерігач каже - принаймі один капелюх червоний.
- Перший мовчить, другий мовчить. Третій каже - мій капелюх червоний.
- Але ж зовнішній спостерігач не сказав нічого нового???

Анекдот

Три логіка заходять в бар. Бармен питає - всі будуть пиво?

Перший: Не знаю

Другий: Не знаю

Третій: Так!

Гра Море Бісмарка

гра з нульовою сумою

	Плисти через південь	Плисти через північ
Летіти на південь	3 -3	1 -1
Летіти на північ	2 -2	2 -2

Гра Море Бісмарка. Знаходження мінімаксу

	Плисти через південь	Плисти через північ
Летіти на південь	<div>3</div> <div>-3</div>	<div>1</div> <div>-1</div>
Летіти на північ	<div>2</div> <div>-2</div>	<div>2</div> <div>-2</div>

Гра Море Бісмарка. Мінімакс

	Плисти через південь	Плисти через північ	мін рядків
Летіти на південь	3 -3	1 -1	1
Летіти на північ	2 -2	2 -2	2
мін стовпців	-3	-2	

ідея Неша, 1953 рік

Кожна некооперативна гра має принаймі одну точку рівноваги (у змішаних стратегіях). Це така точка, в якій жоден з гравців не може покращити свій виграш одноосібно змінивши свою стратегію

Найпростіші матричні ігри: координаційна гра

	Стратегія 1	Стратегія 2
Стратегія 1	1 1	0 0
Стратегія 2	0 0	2 2

Найпростіші матричні ігри: координаційна гра

	Стратегія 1	Стратегія 2
Стратегія 1	1	0
Стратегія 2	0	2

Томас Шелінг



Нобелівський лауреат (2005р.)

Зустрітись у Нью-Йорку

група людей без засобів зв'язку має зустрітись протягом доби, кожен учасник приймає рішення самостійно і без попередніх домовленостей.

Балансування ігор. Чи ця гра сбалансована?

	Червоний	Чорний
Червоний	3 -3	-4 4
Чорний	-5 5	6 -6

Сімейна суперечка - розв'язок

	Футбол	Серіал
Футбол	1 2	0 0
Серіал	0 0	2 1

Найпростіші матричні ігри: курча

	Їхати прямо	Звернути
Їхати прямо	-10 -10	-5 5
Звернути	5 -5	0 0

Курча - розв'язок

	Їхати прямо	Звернути
Їхати прямо	-10 -10	-5 5
Звернути	5 -5	0 0

Дилема ув'язненого



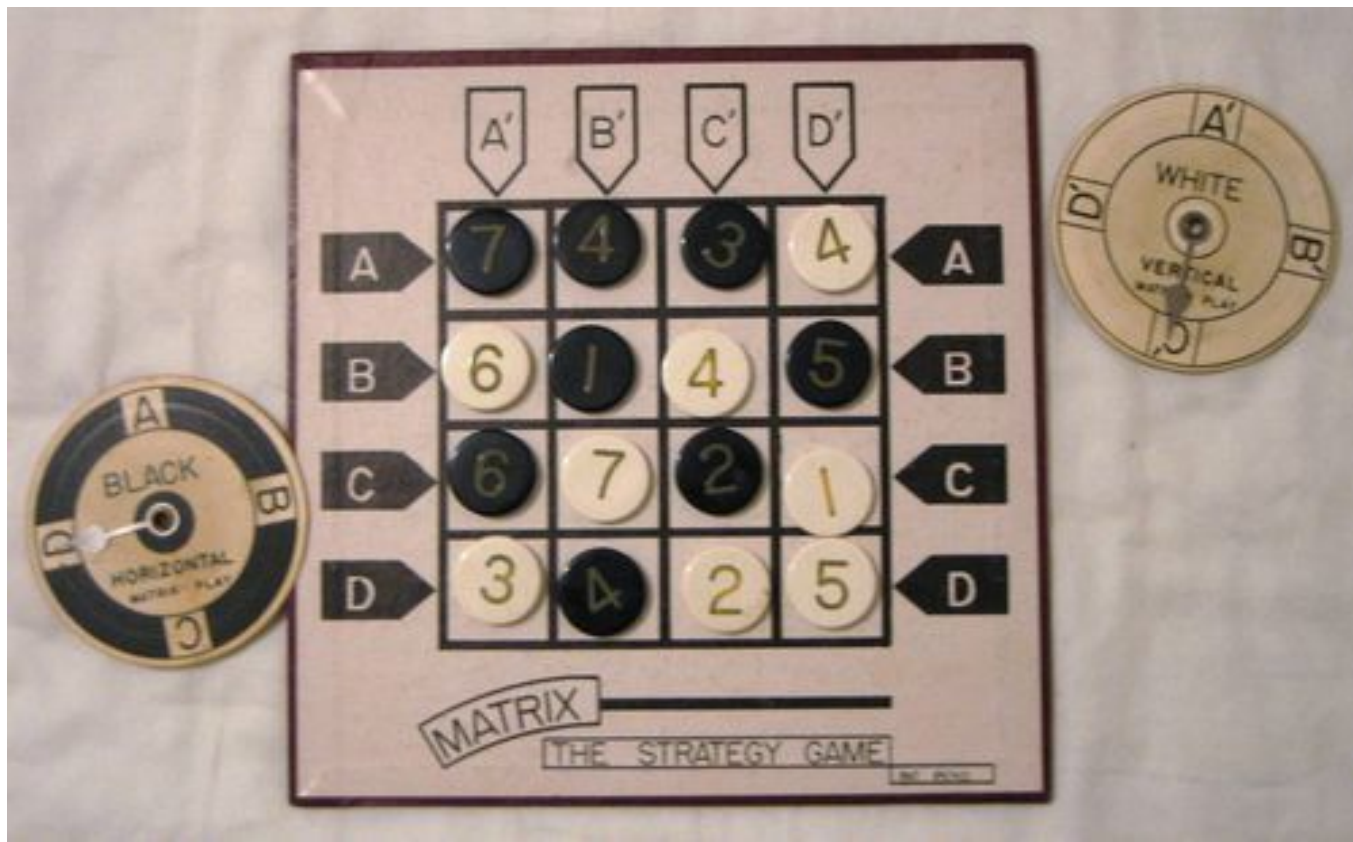
Найпростіші матричні ігри: дилема ув'язненого

	Мовчати	Заговорити
Мовчати	-1 -1	0 -15
Заговорити	-15 0	-10 -10

Балансування ігор. Чи ця гра сбалансована?

	Червоний p	Чорний $1-p$	
Червоний q	3 -3	-4 4	$-3p + 4(1-p) =$ $4 - 7p$
Чорний $1-q$	-5 5	6 -6	$5p - 6(1-p) =$ $11p - 6$
	$3q - 5(1-q) =$ $8q - 5$	$-4q + 6(1-q) =$ $6 - 10q$	

Гра Матриця 1954 рік



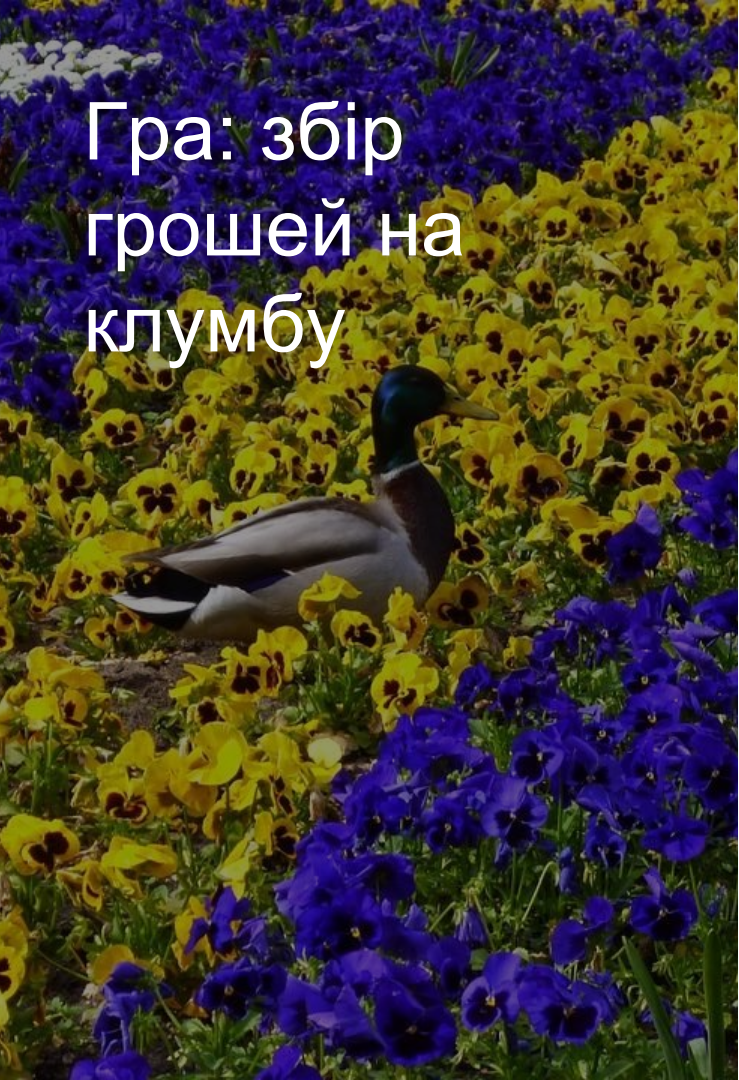
Розширена форма гри

Гра у розширеній формі представляє граф. Вершини це точки прийняття рішень, ребра - можливі рішення.

динаміка

багатокрокові ігри

еквівалентність матричній (нормальній) формі

A photograph of a mallard duck standing in a field of yellow and blue pansies. The duck is positioned in the lower-left quadrant of the image, facing right. The field is densely packed with flowers, with yellow pansies in the foreground and blue pansies in the background.

Гра: збір грошей на клумбу

Трое сусідів (А, Б, С) хочуть зібрати гроші на облаштування клумби. При цьому у кожного є дві стратегії (дати гроші, не давати). І заданий порядок: спочатку приймає рішення А, потім Б, потім С.

Можливі результати гри

0 - ніхто не робить внесок, клумби немає

1 - один робить внесок, клумба маленька

2 - двоє роблять внесок, клумба нормальна

3 - всі роблять внесок, клумба чудова

Виграші кожного гравця

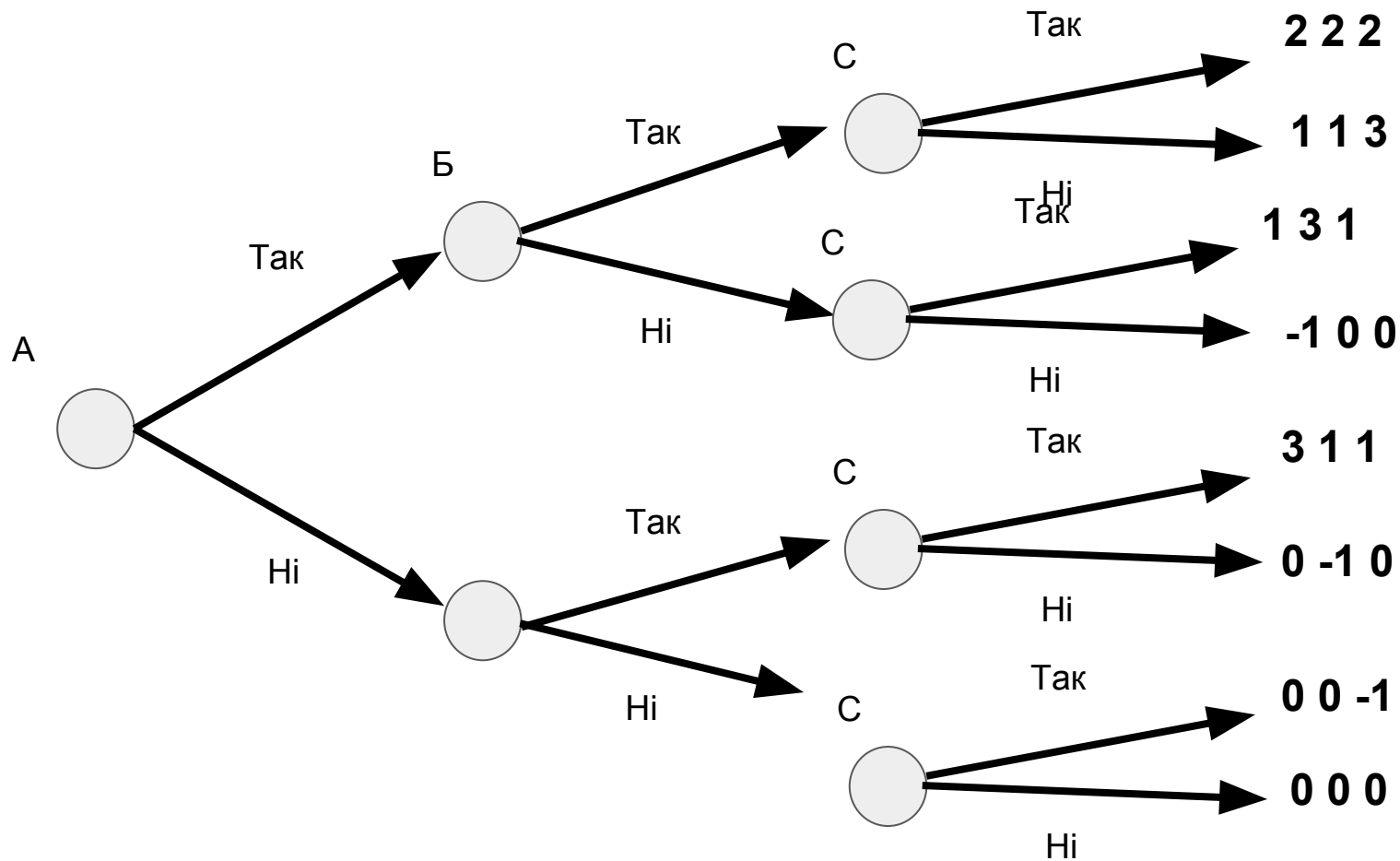
-1 - я здав, інші не здали

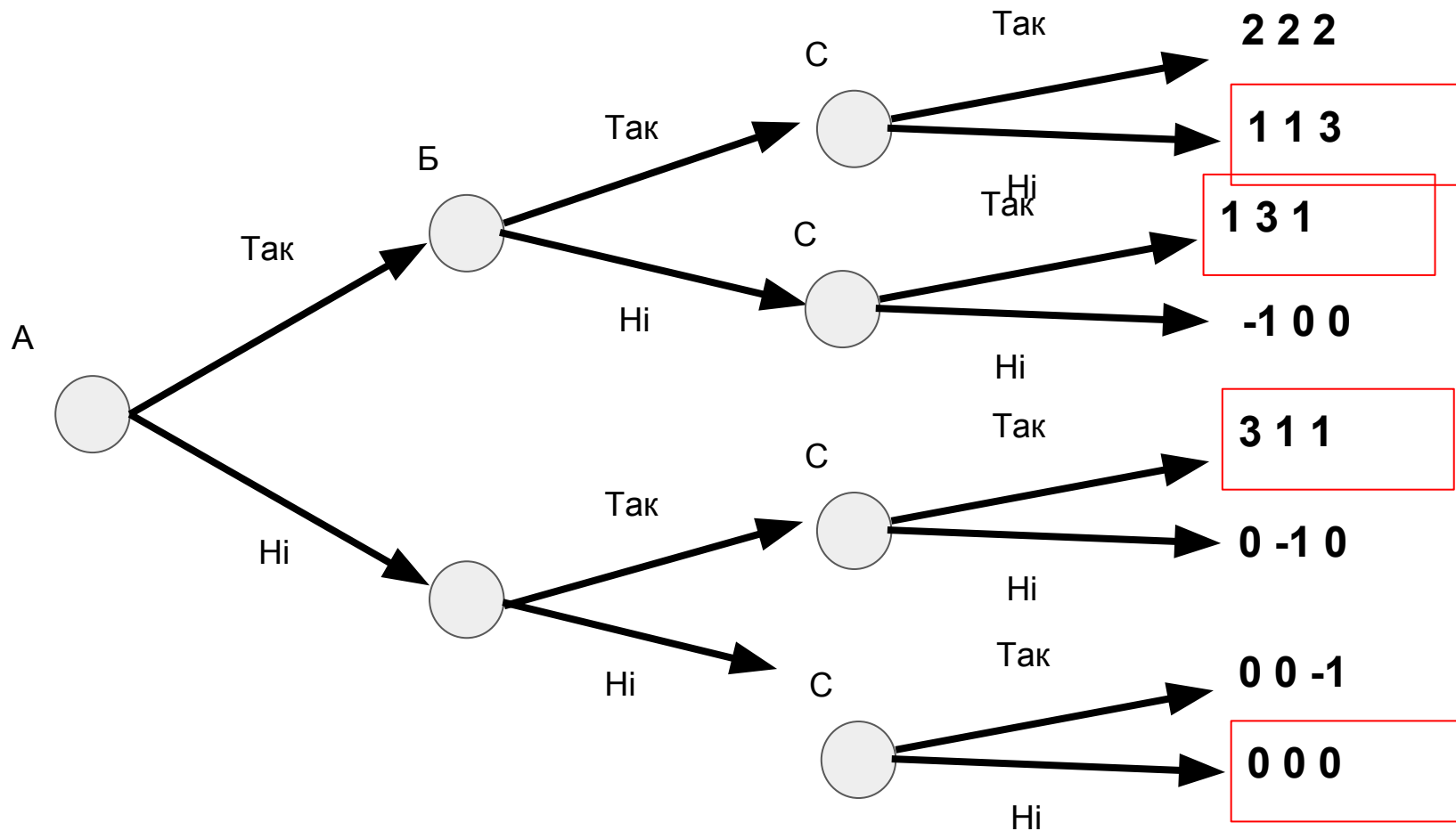
0 - я не здав і не більше одного здало

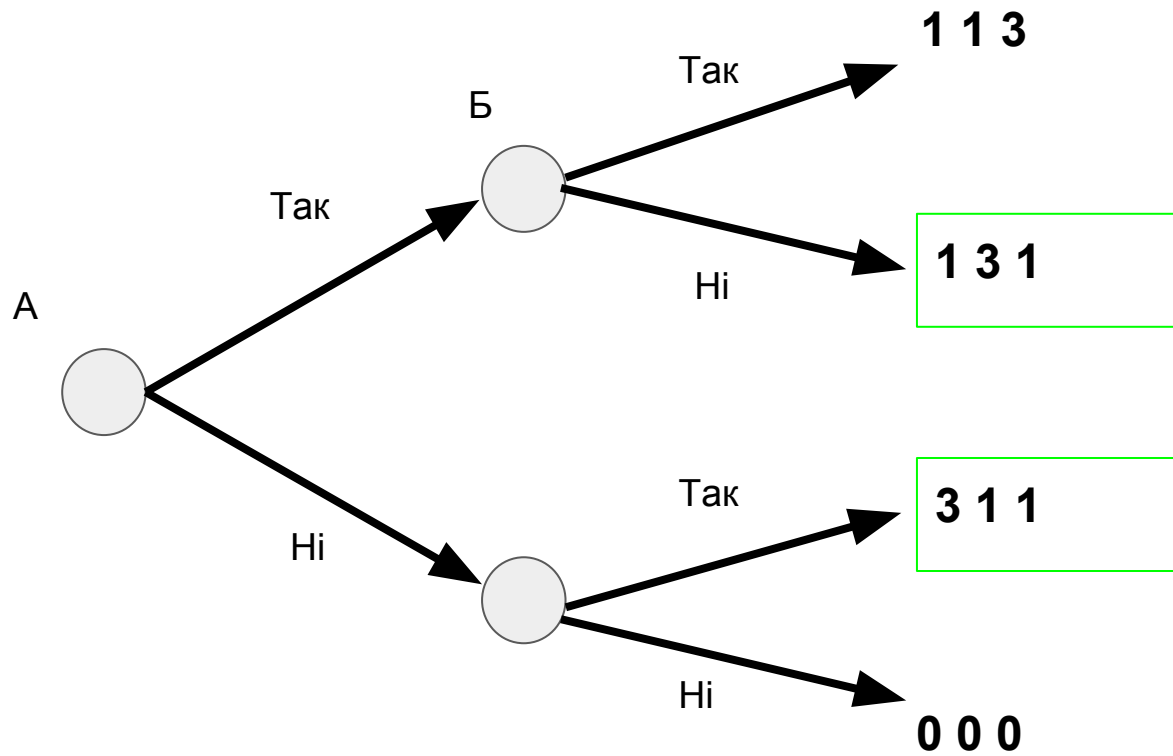
1 - я і ще один здав

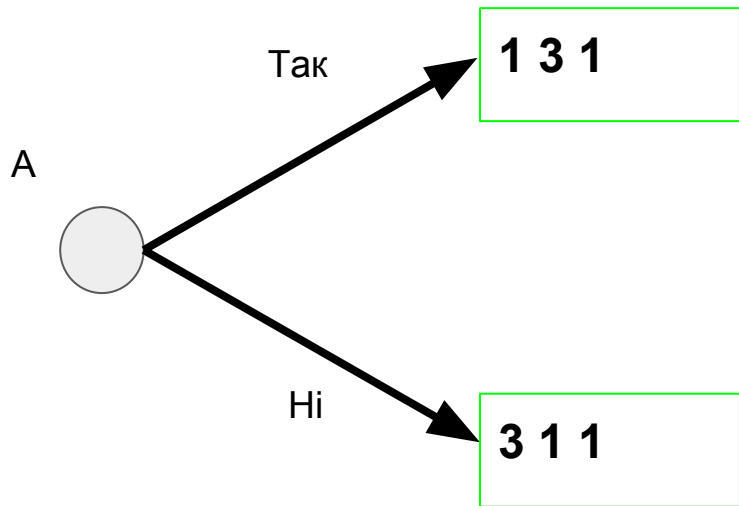
2 - я і ще двоє здали

3 - двоє інших здали









Задача: голодні леви

Умова: є N голодних левів і перед ними тушка антилопи. Всі леви вишикувані за порядком - є головний лев, потім заступник і т.д.

Рішення приймаються починаючи з найголовнішого, по черзі.

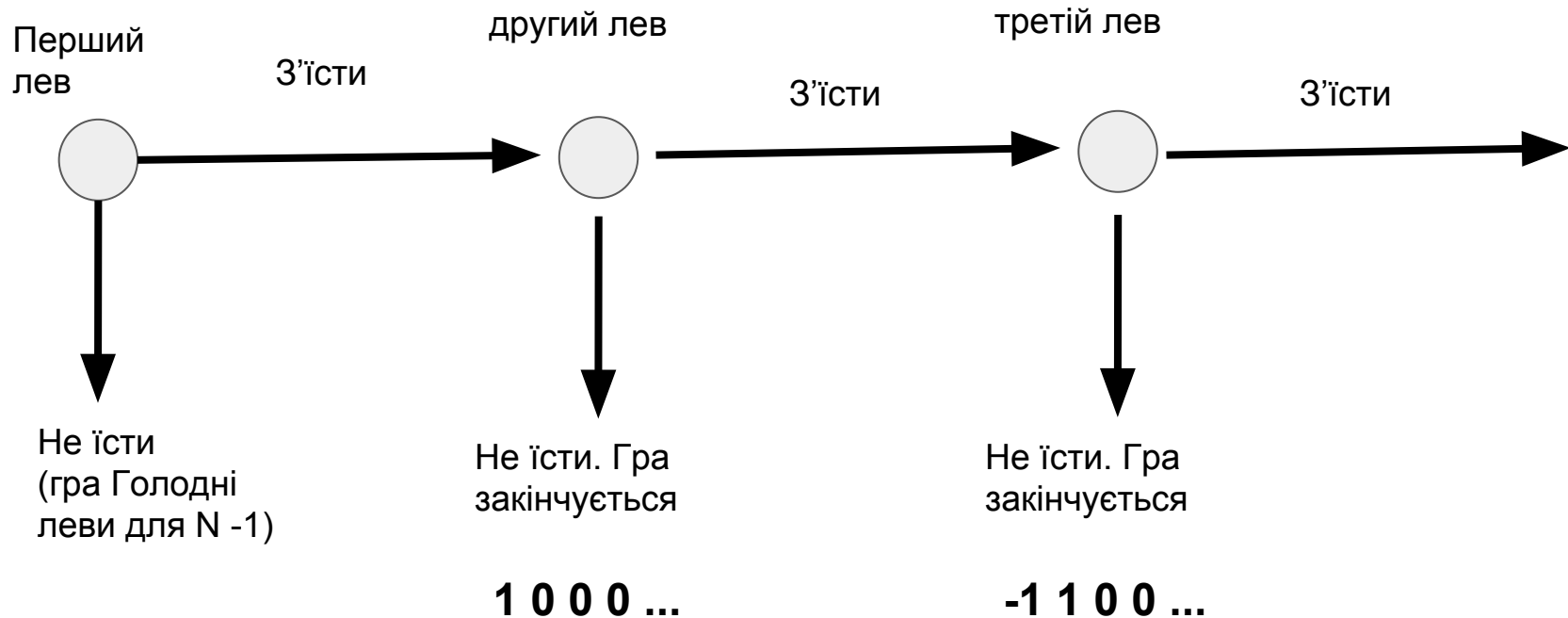


Задача: голодні леви

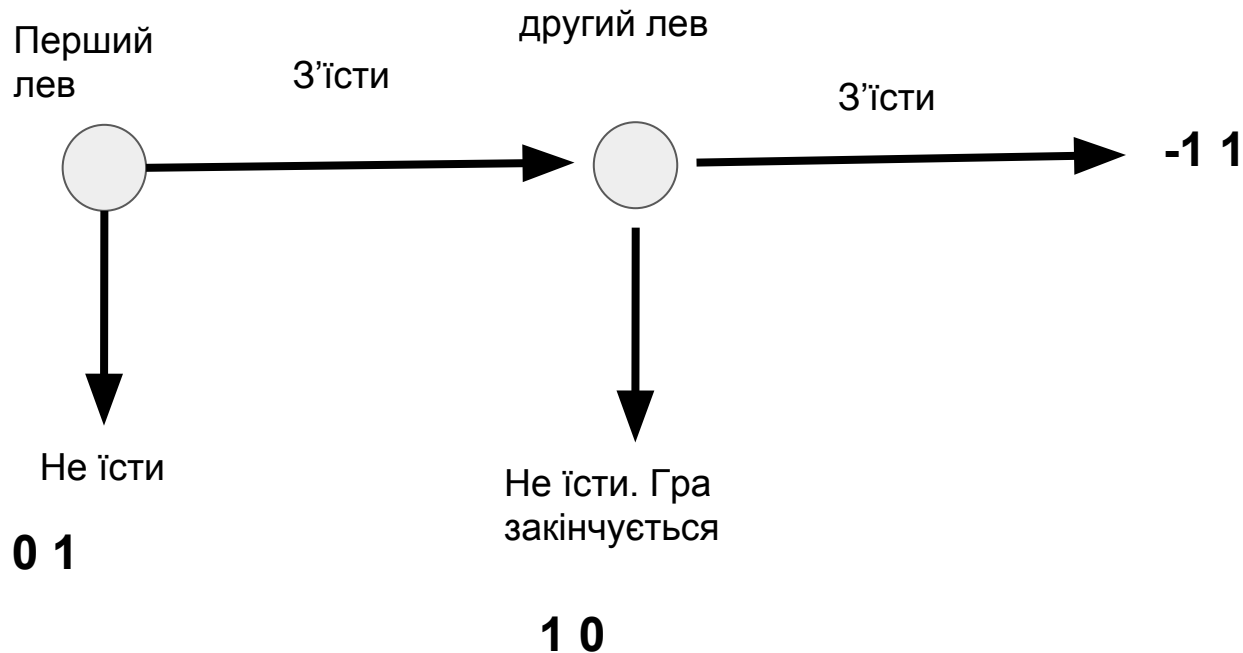
Перший лев вирішує - з'їсти антилопу чи ні. Якщо він з'їдає антилопу то він засинає і стає беззахисним перед наступним левом. Наступний лев приймає рішення чи з'їдати сплячого лева. Якщо він не їсть антилопу, то рішення переходить до наступного.

Відомо, що лева може з'їсти тільки наступний у ієрархії. Всі леви хочуть 1. вижити, 2. їсти.

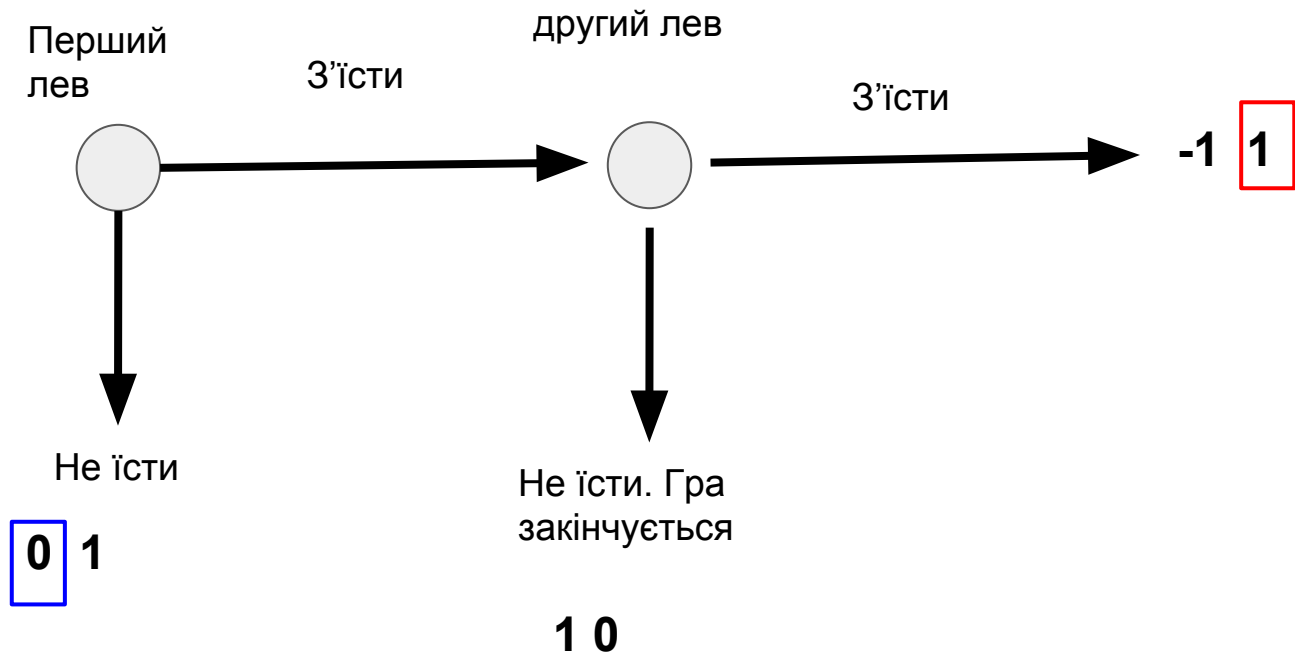
Гра голодні леви для N левів



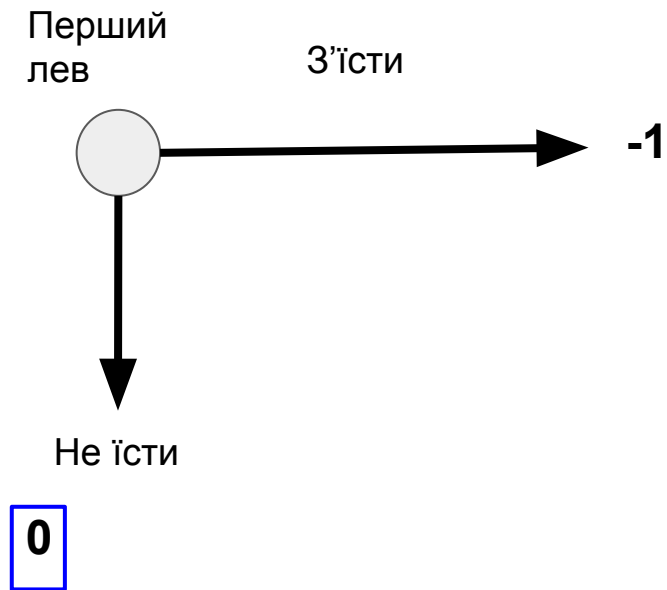
Гра голодні леви для 2 левів



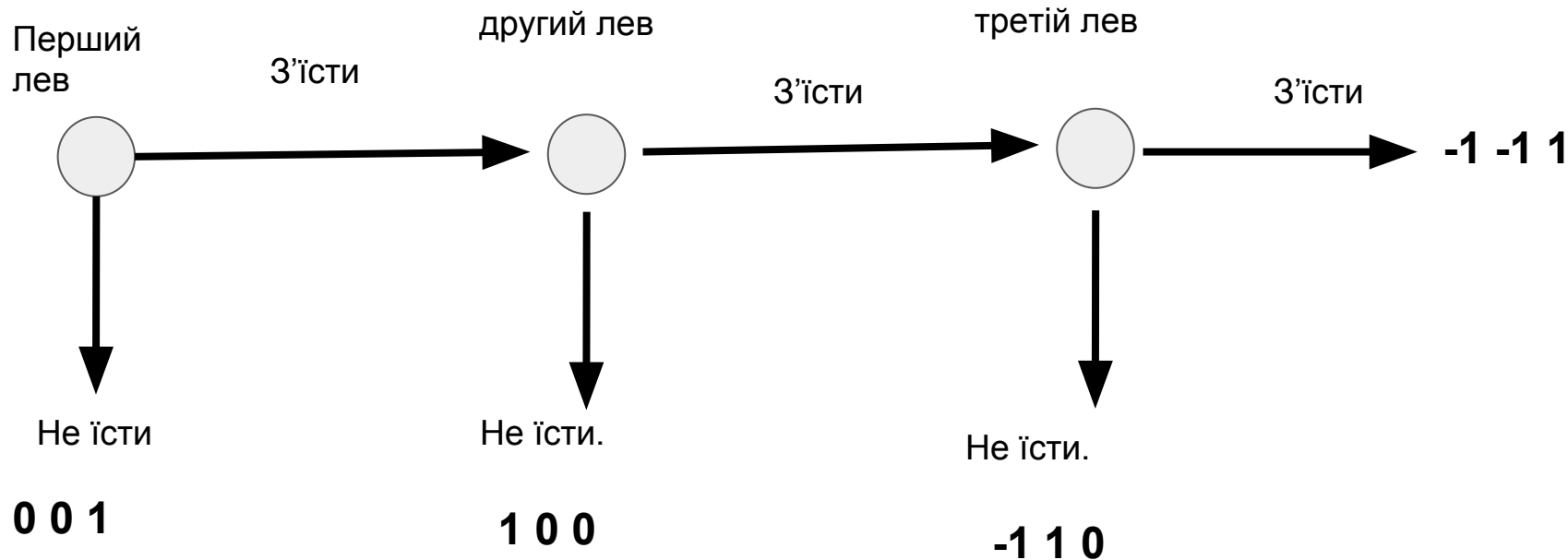
Гра голодні леви для 2 левів



Гра голодні леви для 2 левів

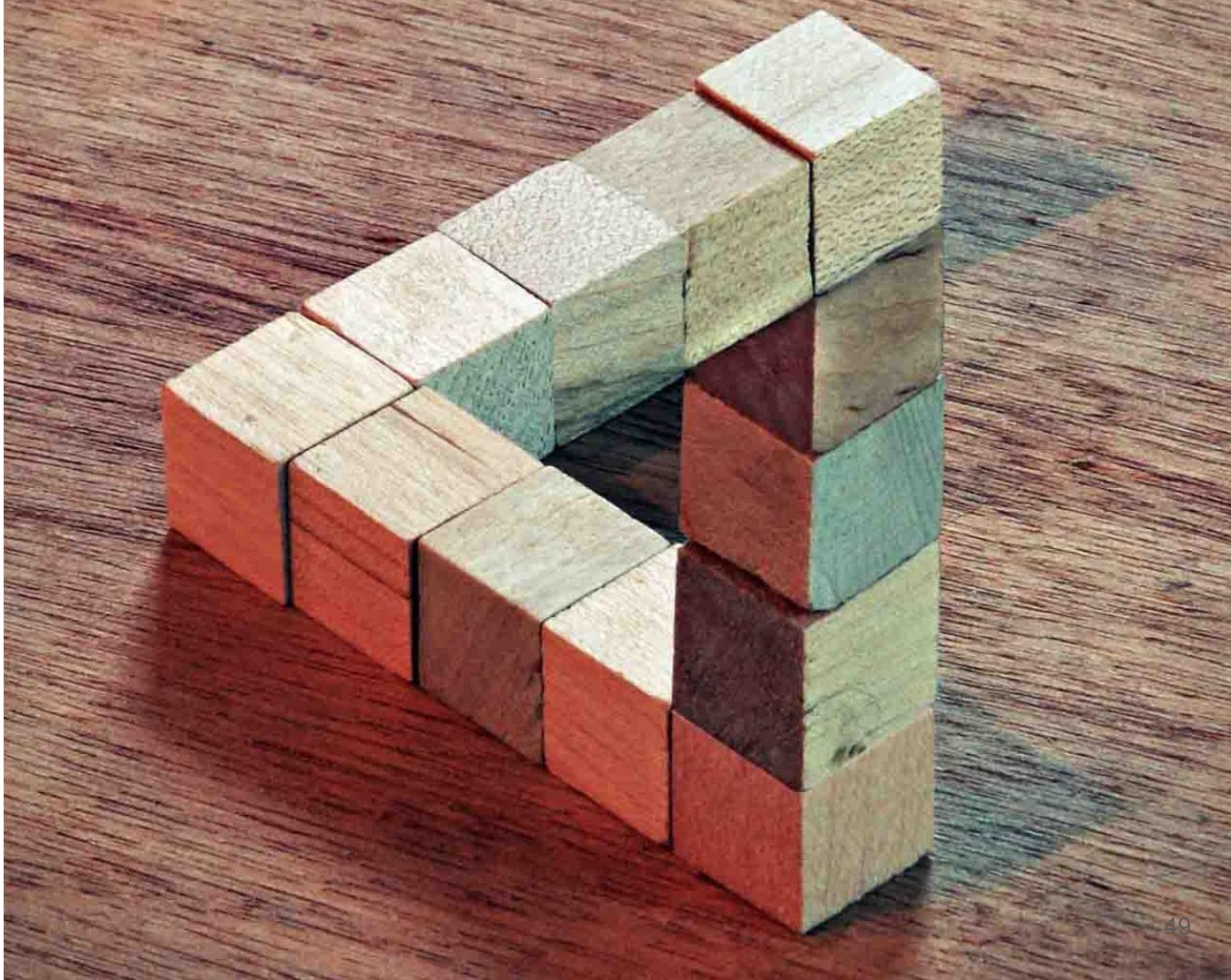


Гра голодні леви для 3 левів



Парадокс

Рішення, які ми
ухвалюємо,
спричинені
наслідками
подій, які ніколи
не трапляються





Задача про бандитів

В печері кожен вечір збираються **N бандитів**. Вони впорядковані за віком.

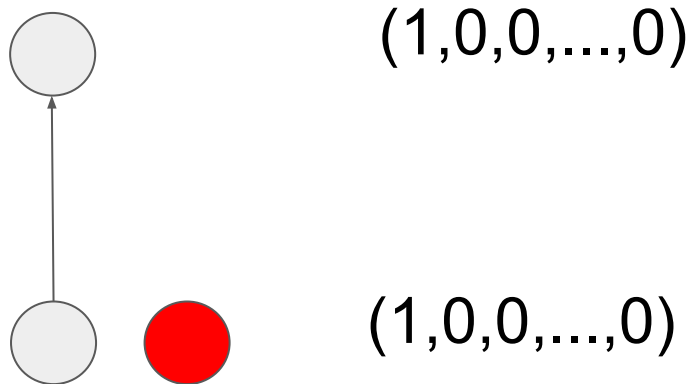
Щодня відбувається одне **голосування**: чи вже час поділити **порівну** награбоване і розійтись?

- Якщо більше половини “За”, то гра закінчується, кожен отримує свою частку.
- Якщо голосування невдале, то бандити **вбивають наймолодшого** і збираються на наступний день.

Кожен бандит, по-перше, **хоче жити**, по-друге, **частку якнайбільше**.

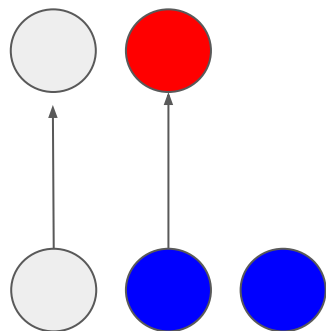
Розв'язок

Припустимо, залишилось двоє бандитів. Тоді розв'язок очевидний:



Розв'язок

Тепер троє:

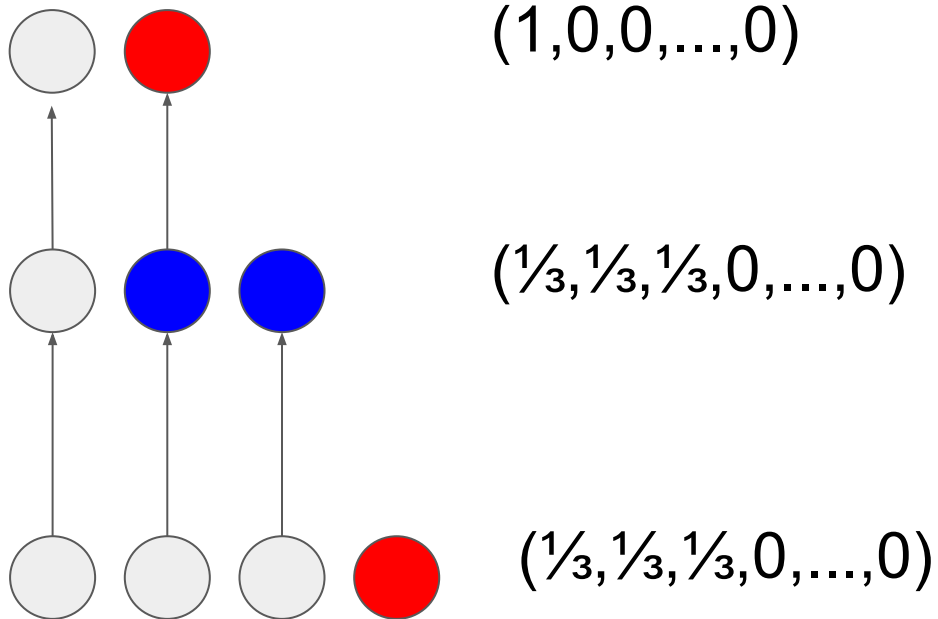


$(1, 0, 0, \dots, 0)$

$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots, 0)$

Розв'язок

Четверо:



Завдання: закінчити розв'язок

Якщо ми почнемо з 1000 бандитів:

1. На якому кроці закінчиться гра?
2. Яку частку отримують бандити?
3. Скільки проголосують за розподіл на останньому кроці?

Обручальне кільце. Історія.



1930 роки, Америка.

відношення до сексу до шлюбу дуже негативне.

з іншого боку після заручин - ок для жінки, якщо вона має впевненість, що весілля відбудеться.

поява кільця - як гарантії намірів.

Ідея скрінінга.

Сигнали і скрінінги

Як повідомити комусь інформацію, яку Ви знаєте?

Як дізнатись інформацію, яку Ви не знаєте?

Бізнес приклад 2. Сміттєпереробний завод

Селищу пропонують побудувати
сміттєпереробний завод.

Як перевірити?



Втекти від
дракона

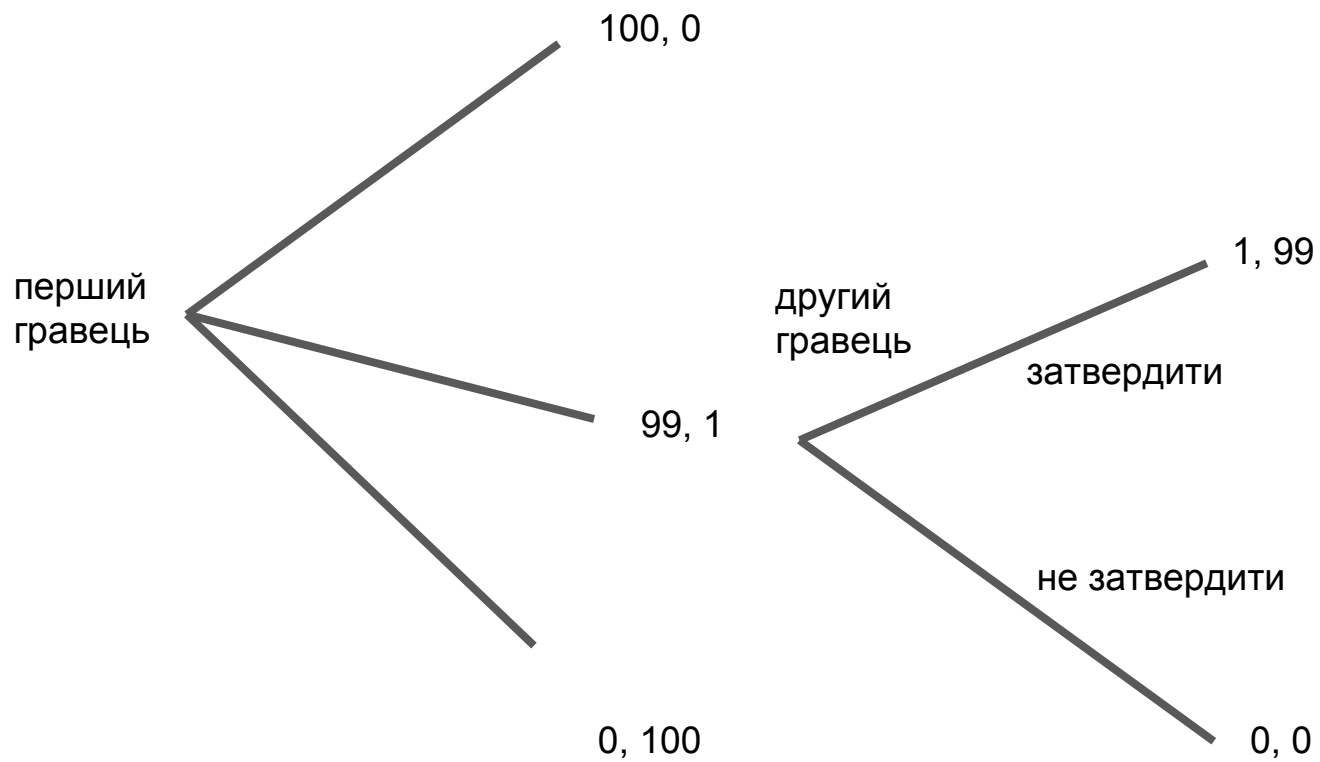
та поділити
здобич за 60
сек



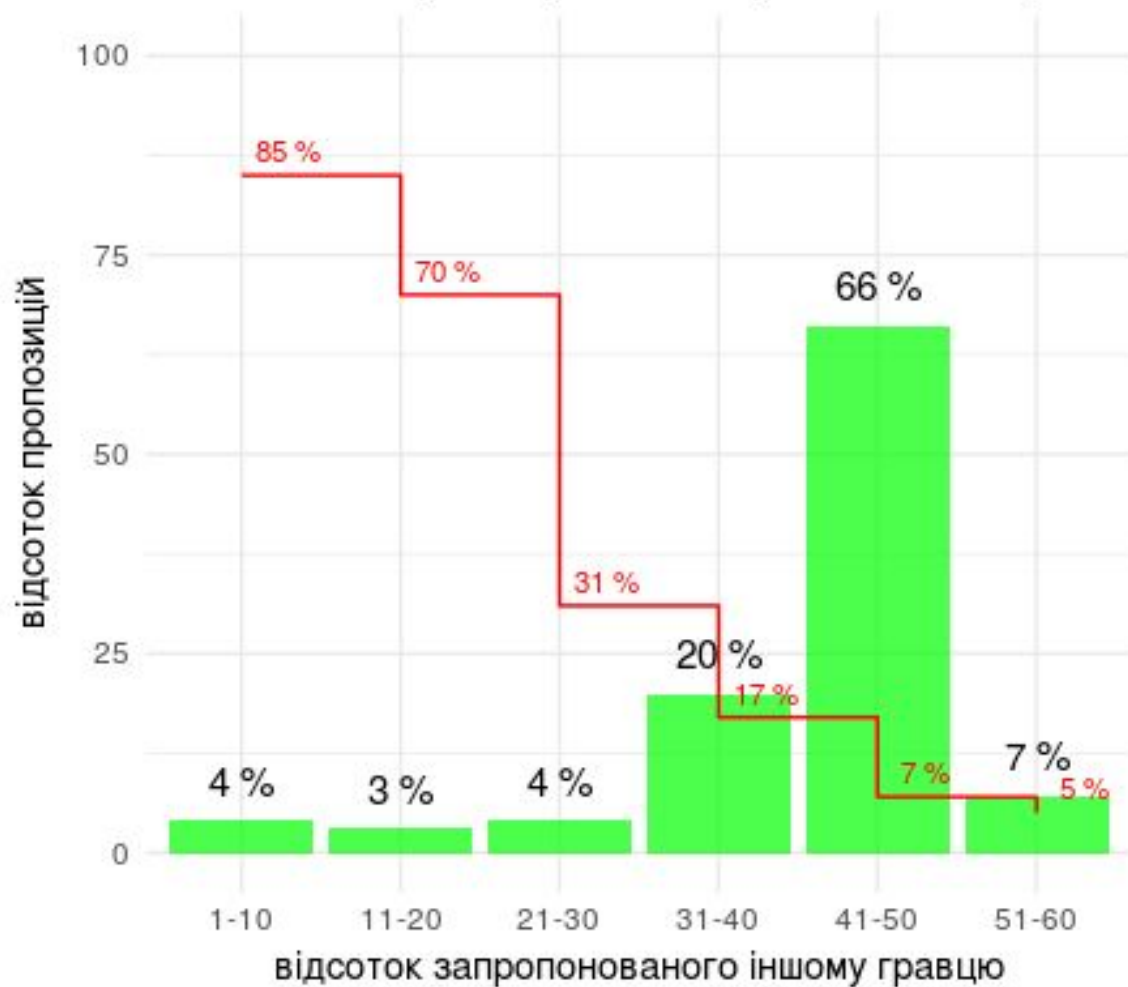


Гра в ультиматум

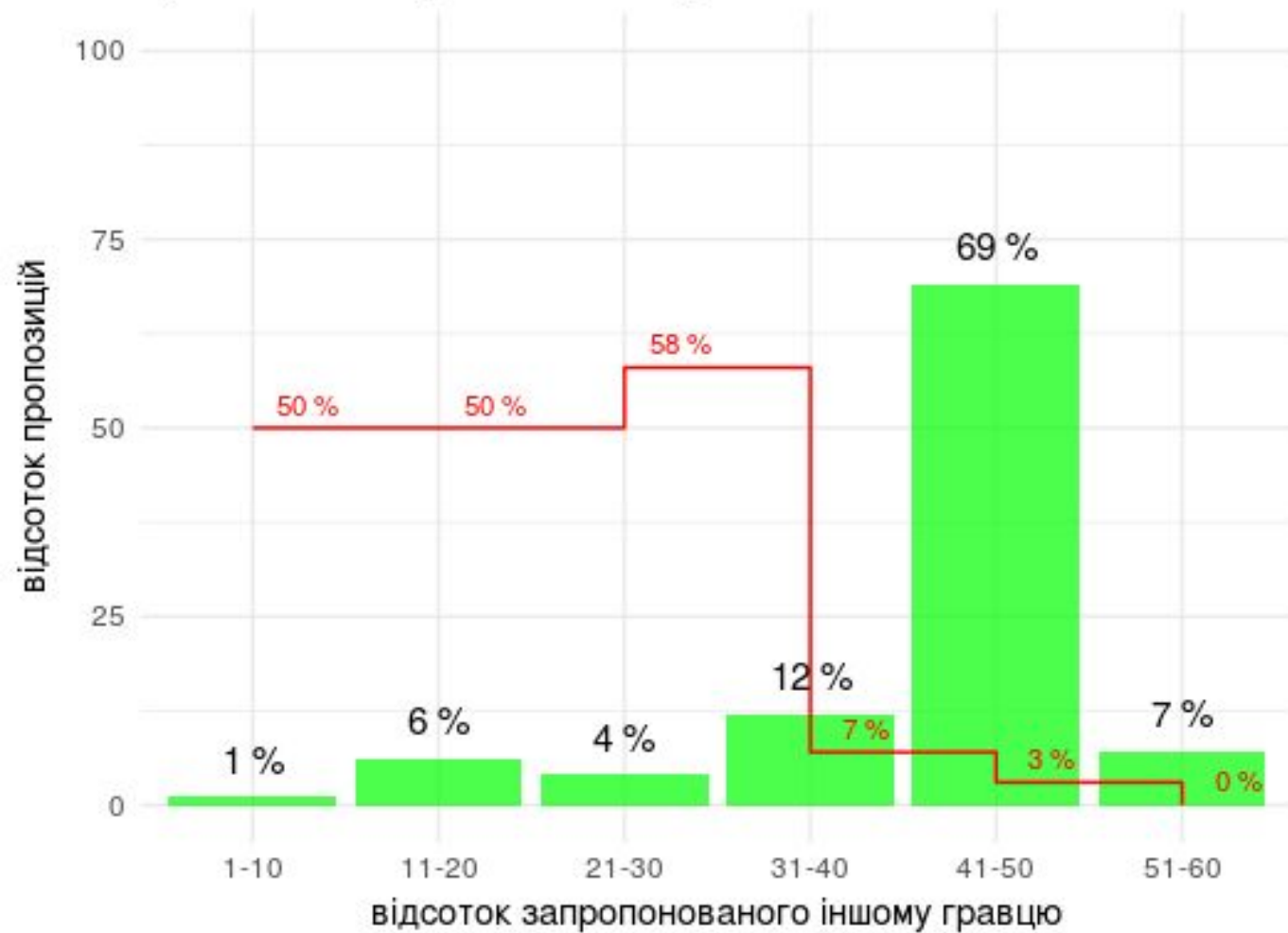
- Один з гравців пропонує розподіл \$100
- Інший гравець затверджує або не затверджує 'запропонований розподіл



Загальна характеристика гри Ультиматум



Гра Ультиматум. Велика сума



Неш придумав декілька ігор.

- **So Long Sucker**
- ***Hex* (board game)**