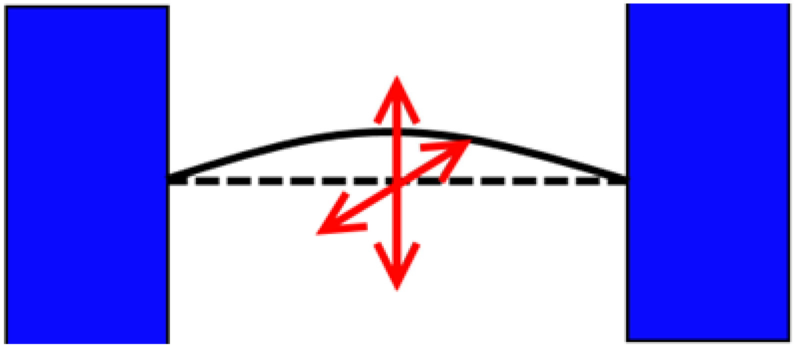
Симуляція динамічних квантових явищ на двомодовому наномаханічному резонаторі

Івахненко О.В.
група ТЯ-51
ХНУ ім. Каразіна

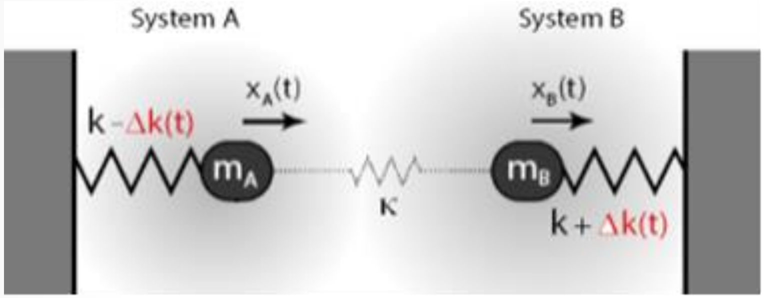
Постановка задачі

- **Наномеханічний резонатор являє собою балку мікрометрової довжини, прямокутного перерізу. Резонатор має дві степені свободи (може коливатись в двох вимірах), що і є причиною наявності двох власних частот.**



- **Задача про коливання наномеханічної резонатора (балки) в одномодовому наближенні зводиться до задачі про коливання двох зв’язаних гармонічних осциляторів зі слабким зв’язком.**

- Систему із двох зв'язаних гармонічних осциляторів можна представити у вигляді двох кульок з закріпленими до них пружинами, та пружиною між ними з меншою жорсткістю.



- Така система описується класичними рівняннями Ньютона:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_A + \gamma\dot{x}_A + k_A x_A + \kappa\left(x_A - x_B\right) = 0 \\ m\ddot{x}_B + \gamma\dot{x}_B + k_B x_B + \kappa\left(x_B - x_A\right) = 0 \end{cases}$$

Класичні рівняння подібні до рівняння Шредінгера

- За допомогою матриць Паулі можна переписати систему рівнянь резонатора у вигляді:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+\gamma\frac{d}{dt}+\Omega_0^2\right]\begin{bmatrix}x_A\\x_B\end{bmatrix}+\left[-\Omega_c^2\sigma_x-\Omega_d^2\sigma_z\right]\begin{bmatrix}x_A\\x_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

- Використовуючи анзац: $\tilde{x}_{A,B}=\psi_{A,B}\pm e^{i\Omega_0 t}$ $\quad x_{A,B}=\mathrm{Re}(\tilde{x}_{A,B})$ отримаємо рівняння:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+(\gamma+2i\Omega_0)\frac{d}{dt}+i\Omega_0\gamma\right]\begin{bmatrix}\psi_A\\\psi_B\end{bmatrix}+\left[-\Omega_c^2\sigma_x-\Omega_d^2\sigma_z\right]\begin{bmatrix}\psi_A\\\psi_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

використаємо: $\gamma\ll\Omega_0$

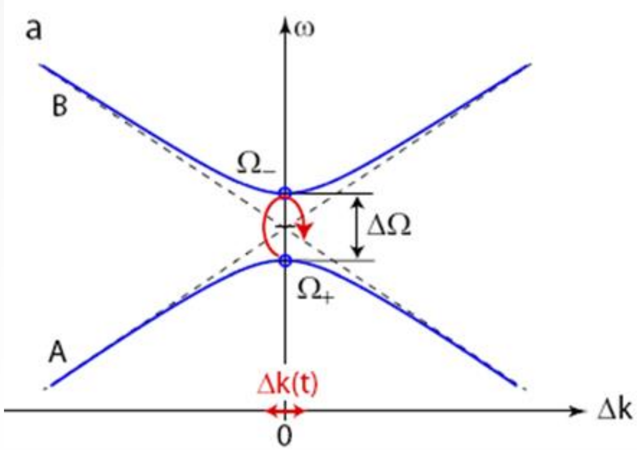
- Далі наближення повільно змінюваної оминаючої дозволяє знехтувати другою похідною.
- Після перепозначення отримаємо: $i\frac{d}{dt}|\psi\rangle=H(t)|\psi\rangle-\frac{i\gamma}{2}|\psi\rangle,$

де $|\psi\rangle=\begin{pmatrix}\psi_A\\\psi_B\end{pmatrix}$ спінор, а $H(t)=-\frac{\Delta}{2}\sigma_x-\frac{\varepsilon(t)}{2}\sigma_z$ (2) гамільтоніан в якому:

$$\Delta=\frac{\Omega_c^2}{\Omega_0}=\frac{\kappa}{\sqrt{mk}};\quad \varepsilon(t)=\frac{\Omega_d^2}{\Omega_0}=\frac{\Delta k(t)}{\sqrt{mk}}$$

Осциляції Рабі

- Схематичне зображення осциляцій Рабі:

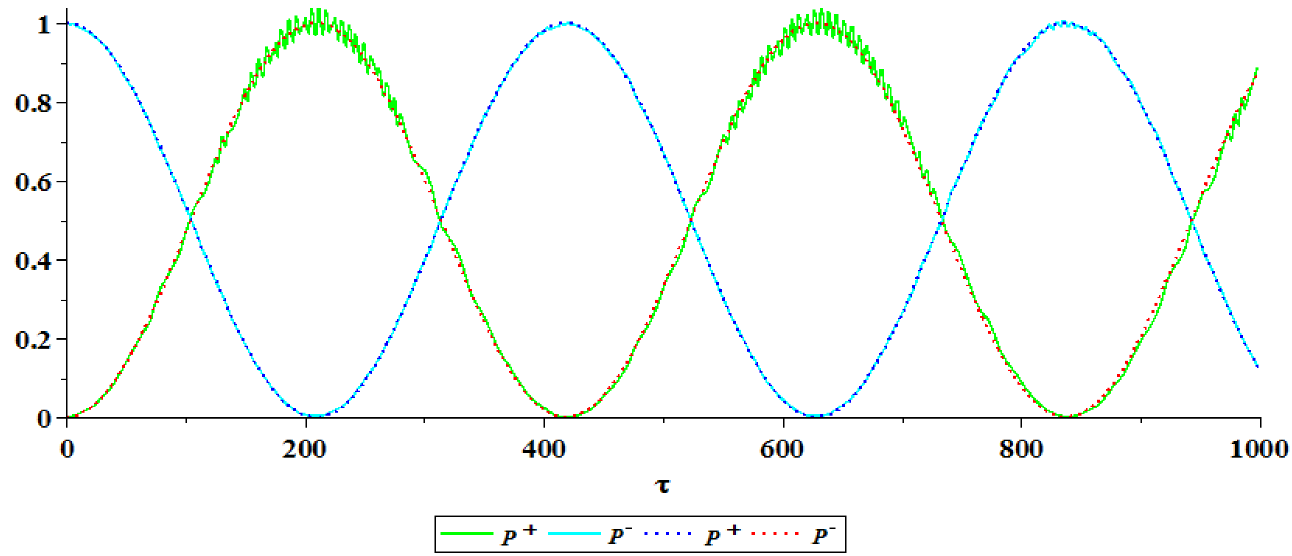


Осциляції рабі виникають при періодичному збудженні квантової дворівневої системи, з малою амплітудою та великою частотою збудження. Та представляють собою періодичну зміну заселеності енергетичних рівнів за рахунок тунелювання у квантовій механіці з частотою:

- $\Omega_R = \sqrt{A^2 + \delta^2}$ Де А це амплітуда збудження, яка є малою величиною, δ відстройка між частотою збудження та різницею енергій енергетичних рівнів. $\delta = \Delta\Omega - \omega_{drive}; \quad \Delta\Omega = \Omega_{-} - \Omega_{+};$
- Тепер перепишемо осциляції Рабі в безрозмірних величинах: $\tilde{\Omega}_R = \sqrt{\tilde{A}^2 + \left(\tilde{\Omega}_{-} - \tilde{\Omega}_{+} - \tilde{\omega}_{drive}\right)^2};$

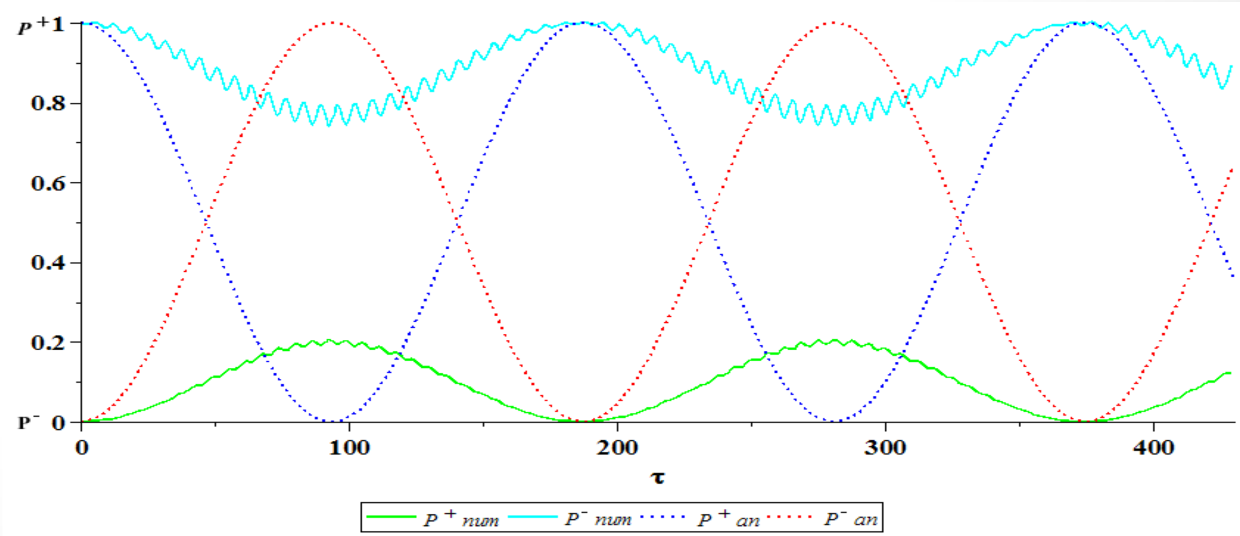
- **Звідси аналітичний розв'язок:** $P^{+} = \cos\left(\frac{\tilde{\Omega}_R \tau}{2}\right)\exp\left(-\tilde{\gamma}\tau\right);$

- **На малюнках видно що чисельний розв'язок співпадає з аналітичним.**



ωdr=1; γ=0.; k=0.015; K0=0. ; A=0.05

На цьому малюнку Показано нерезонансний випадок, коли заселеність рівнів змінюється не повністю.



ωdr=1; γ=0.; k=0.015; K0=0.03 ; A=0.05

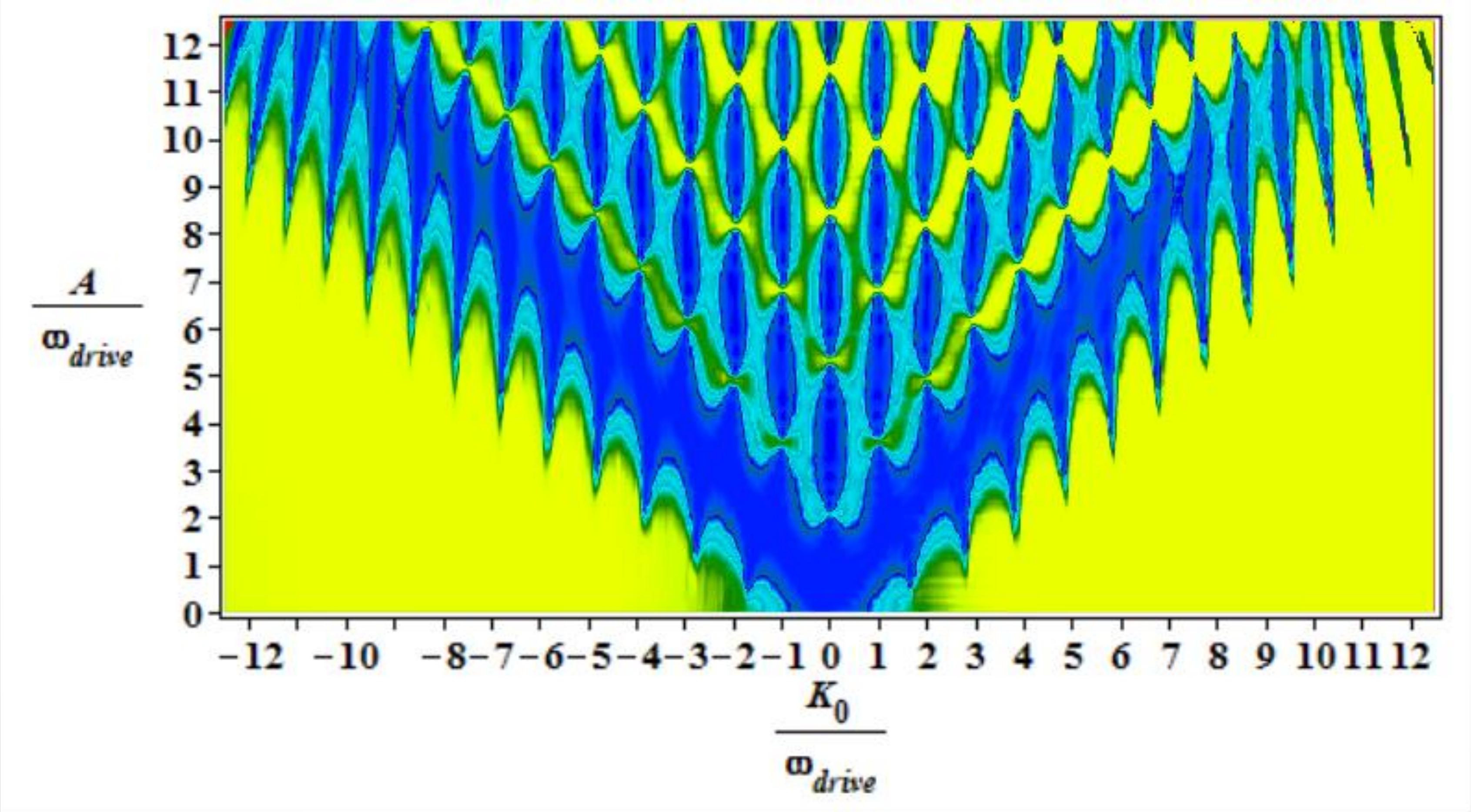
Результати чисельних розрахунків для ЛЗШМ інтерфрограми

Резонансний випадок

$\langle P_+(A,K_0) \rangle$

-0

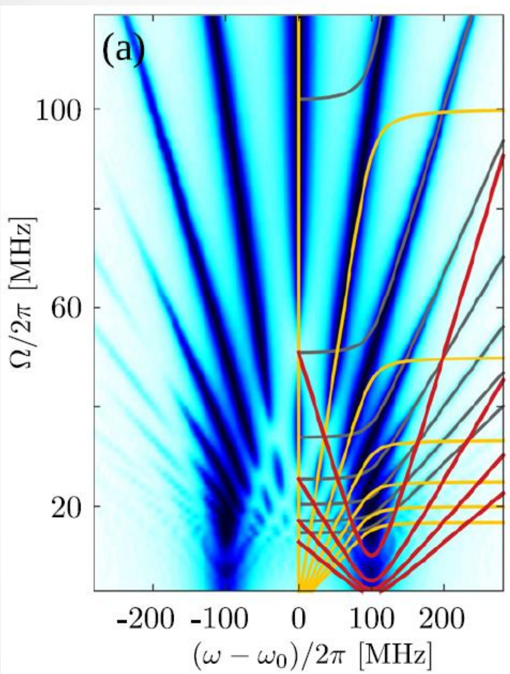
-0.5



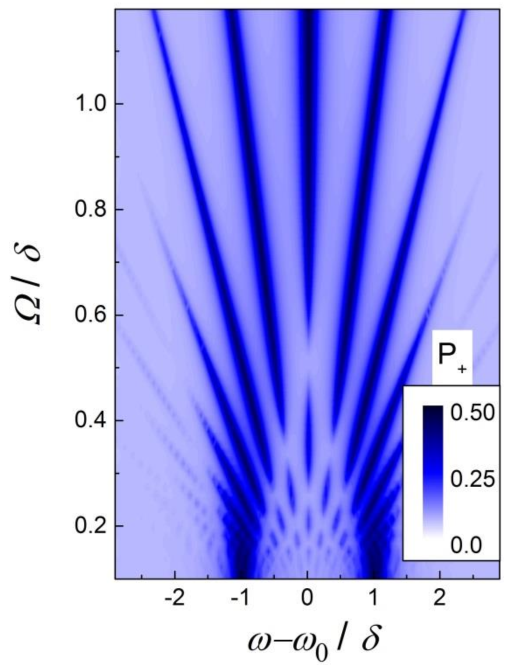
Також ми розглянули випадок latching modulation

В якому розглядаєтся залежність **$\langle P_+(\Omega, \omega-\omega_0)\rangle$** де

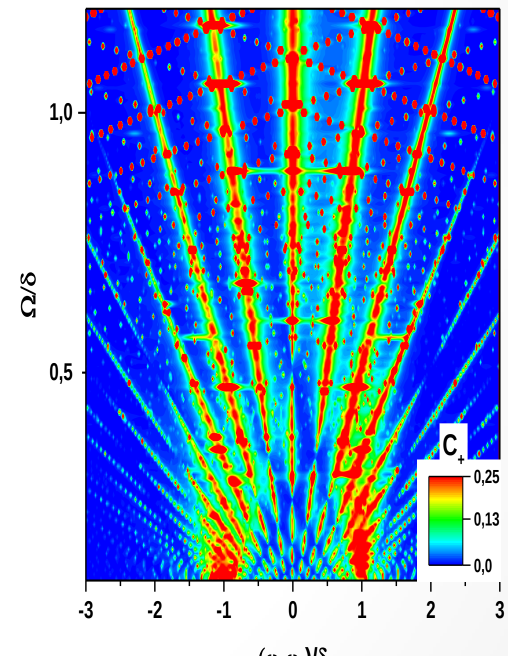
$\omega - \omega_0 = K_0$



Silveri et al., NJP 2015



from Bloch eqn.



Coupled mechanical resonators, Eqs. (2).

Висновки

- **Останні зображення збігаються з зображеннями отриманими аналітично для квантового випадку в (1).**
- **Було продемонстровано незвичну аналогію між квантовою системою-кубітом та механічною системою: наномеханічним резонатором.**
- **Розв'язано чисельно та аналітично випадок осциляцій Рабі.**

Планується:

- **Дослідити ЛЗШМ інтерференцію аналітично.**
- **Розглянути інші динамічні квантові явища, які можна було б спостерігати на наномеханічному резонаторі.**
- **Пошук розбіжностей між квантовім та механічним випадком.**

- **Будемо розглядати параметричне збудження такої системи, коли:** $k_{B,A} = k \pm \Delta k$ **. А збудження задається як** $\boxed{\Delta k = K_0 + A\sin(\omega_{dr} t)}$, **де** K_0 **постійна відстройка,** $A\sin(\omega_{dr} t)$ **періодичне збудження.**

$$\begin{cases} \ddot{x}_A + \dfrac{\gamma}{m}\dot{x}_A + \left[\dfrac{k+\kappa}{m} - \dfrac{\Delta \mathrm{k(t)}}{m}\right] x_A - \dfrac{\kappa}{m} x_B = 0 \\ \ddot{x}_B + \dfrac{\gamma}{m}\dot{x}_B + \left[\dfrac{k+\kappa}{m} + \dfrac{\Delta \mathrm{k(t)}}{m}\right] x_B - \dfrac{\kappa}{m} x_A = 0 \end{cases} .$$

- **Позначимо частоти:** $\Omega_0^2 = \dfrac{[k+\kappa]}{m}$ $\quad \Omega_d^2 = \dfrac{\Delta \mathrm{k}}{m}$ $\quad \Omega_c^2 = \dfrac{\kappa}{m}$
- **Для обезрозмірення розділимо усі рівняння на** Ω_0^2
- **Позначимо:** $\Omega_0 t \equiv \tau$ $\quad \dfrac{\gamma}{m\Omega_0} \equiv \tilde{\gamma},$ $\quad \dfrac{\Omega_c^2}{\Omega_0^2} \equiv \dfrac{\kappa}{k+\kappa} \approx \dfrac{\kappa}{k} = \tilde{\kappa}$ $\quad \dfrac{\Omega_d^2}{\Omega_0^2} \equiv \dfrac{\Delta \mathrm{k}}{k+\kappa} \approx \dfrac{\Delta \mathrm{k}}{k} = \tilde{\Delta \mathrm{k}}$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d^2}{d\tau^2} + \tilde{\gamma}\dfrac{d}{d\tau} + 1\right] x_A - (\tilde{K}_0 + \tilde{A}\sin(\tilde{\omega}_{dr}\tau) x_A - \tilde{\kappa} x_B = 0 \\ \left[\dfrac{d^2}{d\tau^2} + \tilde{\gamma}\dfrac{d}{d\tau} + 1\right] x_B + (\tilde{K}_0 + \tilde{A}\sin(\tilde{\omega}_{dr}\tau) x_B - \tilde{\kappa} x_A = 0 \end{cases} .$$

Власні частоти наномеханічного резонатора

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+\gamma\frac{d}{dt}+\Omega_0^2\right]\begin{bmatrix}x_A\\x_B\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\Omega_d^2 & -\Omega_c^2\\-\Omega_c^2 & \Omega_d^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_A\\x_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

- **Власні значення матриці** $\begin{bmatrix}-\Omega_d^2 & -\Omega_c^2\\-\Omega_c^2 & \Omega_d^2\end{bmatrix}$ **і будуть власними частотами.**
-
- $\det\begin{vmatrix}-\Omega_d^2-\lambda & -\Omega_c^2\\-\Omega_c^2 & \Omega_d^2-\lambda\end{vmatrix}$ **Звідси і знаходимо власні частоти :**

$$\Omega_{\pm}=\left[\Omega_0^2\mp\sqrt{\Omega_c^4+\Omega_d^4}\right]^{1/2}$$